Serie 4 : Application Linéaire

Ex 3 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire

$(x, y) \longrightarrow (x-y, x, x+y)$

1) Mq f injective et non surj

$(\text{Ker} f = \{0\}$ et $\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3)$

$\rightarrow \text{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (x-y, x, x+y) = (0,0,0)\}$

ou a $\begin{cases} x-y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

$\text{Ker} f = \{(0,0)\}$

Th du rang : $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$

$0 \quad + \quad 2 \quad = \quad 2$

$\Rightarrow \dim \text{Im} f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

$\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3$

base de Im f :

$e_1 = (1,0) \longrightarrow f(e_1) = (1,1,1) \in \text{Im} f$

$e_2 = (0,1) \longrightarrow f(e_2) = (-1,0,1) \in \text{Im} f$

or $\text{card}\{(1,1,1), (-1,0,1)\} = 2 = \dim \text{Im} f$

il suffit de vérifier que $\{(1,1,1), (-1,0,1)\}$ est libre

ou $\{(1,1,1), (-1,0,1)\}$ f.g de Im f.

libre $\alpha(1,1,1) + \beta(-1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

f.g) D'après le cours : l'image d'une base de E est un f.g de Im f = f(E)

donc $\{(1,0), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{f(1,0), f(0,1)\}$ f.g de Im f

$(1,1,1) \quad (-1,0,1)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire

$(x,y,z) \longrightarrow (x-y+z, 2x+y-3z)$

1) Donner une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$

2) g est-elle inj ? surj ? bij ?

→ base du $\ker g$

$\ker g = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x-y+z, 2x+y-3z) = (0,0) \}$

Soit $X \in \ker g \iff X = (x,y,z)$ et $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

① + ② $\quad 3x - 2z = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}z$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}z - y + z = 0 \\ x = \frac{2}{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3}z \\ z = \frac{3}{3}z \end{cases}$

$\Rightarrow X = \left(\frac{2}{3}z, \frac{5}{3}z, z\right)$

$X = z\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$

Rq → (g non inj car $\ker g \neq 0$)

$\Rightarrow \ker g = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \right\rangle = \langle (2,5,3) \rangle$ ($\neq (0,0,0)$)

Donc $\{(2,5,3)\}$ est une base de $\ker g$

$\downarrow$

$\dim \ker g = 1$

$\left.\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im} g = 2, \dim \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{Im} g \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} g = \mathbb{R}^2} \Rightarrow g$ surj

$\Downarrow$

La base canonique de $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi une base de $\mathrm{Im} g$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire

$(x,y,z) \longrightarrow (x-y+z, 2x+y-3z)$

1) Donner une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$

2) g est-elle inj ? surj ? bij ?

→ base du $\ker g$

$\ker g = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x-y+z, 2x+y-3z) = (0,0) \}$

Soit $X \in \ker g \iff X = (x,y,z)$ et $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

① + ② $\quad 3x - 2z = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}z$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}z - y + z = 0 \\ x = \frac{2}{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3}z \\ z = \frac{3}{3}z \end{cases}$

$\Rightarrow X = \left(\frac{2}{3}z, \frac{5}{3}z, z\right)$

$X = z\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$

Rq → (g non inj car $\ker g \neq 0$)

$\Rightarrow \ker g = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \right\rangle = \langle (2,5,3) \rangle$ ($\neq (0,0,0)$)

Donc $\{(2,5,3)\}$ est une base de $\ker g$

$\downarrow$

$\dim \ker g = 1$

$\left.\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im} g = 2, \dim \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{Im} g \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} g = \mathbb{R}^2} \Rightarrow g$ surj

$\Downarrow$

La base canonique de $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi une base de $\mathrm{Im} g$

Ex 5 :

E K.e.v / $\dim E = n$

$f : E \to K$ app linéaire $f \neq 0$

$(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in E,\ f(x) \neq 0)$

$(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0)$

1) Mq f est surj $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{Im} f = K}$?

$\mathrm{Im} f$ s.e.v de K $\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \leq \dim K = 1$ $\left(\forall x \in K,\ x = x.1,\ K = \langle 1 \rangle, 1 \neq 0 \Rightarrow \{1\} \text{ base de } K\right)$

si $\dim \mathrm{Im} f = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \{0\}$ or $\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ absurde

donc $\dim \mathrm{Im} f = 1 = \dim K$ et $\mathrm{Im} f \subset K$ $\Rightarrow \mathrm{Im} f = K$

Alors f est surj

2) Soit $x \in E$ / $f(x) \neq 0$

Mq $\mathrm{Ker} f \oplus \langle x \rangle = E$

$\Leftrightarrow$ Mq $\mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle = E$

Soit $y \in \mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle \Rightarrow f(y) = 0$

$\Rightarrow y = \alpha x$

$\Rightarrow f(\alpha x) = 0$

$\Rightarrow \alpha f(x) = 0$ ($f(x) \neq 0$) $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\mathrm{Ker} f \subset E$ et $\langle x \rangle \subset E$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f + \langle x \rangle \subset E$

et $\dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \langle x \rangle - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle)$ ($= 0$)

$\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \dim \mathrm{Im} f = n - 1$

$\dim \langle x \rangle = 1$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = n - 1 + 1 = n = \dim E$

alors $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle = E$

(car $\dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = \dim E$ et $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle \subset E$)

Ex 5 :

E K.e.v / $\dim E = n$

$f : E \to K$ app linéaire $f \neq 0$

$(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in E,\ f(x) \neq 0)$

$(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0)$

1) Mq f est surj $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{Im} f = K}$?

$\mathrm{Im} f$ s.e.v de K $\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \leq \dim K = 1$ $\left(\forall x \in K,\ x = x.1,\ K = \langle 1 \rangle, 1 \neq 0 \Rightarrow \{1\} \text{ base de } K\right)$

si $\dim \mathrm{Im} f = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \{0\}$ or $\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ absurde

donc $\dim \mathrm{Im} f = 1 = \dim K$ et $\mathrm{Im} f \subset K$ $\Rightarrow \mathrm{Im} f = K$

Alors f est surj

2) Soit $x \in E$ / $f(x) \neq 0$

Mq $\mathrm{Ker} f \oplus \langle x \rangle = E$

$\Leftrightarrow$ Mq $\mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle = E$

Soit $y \in \mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle \Rightarrow f(y) = 0$

$\Rightarrow y = \alpha x$

$\Rightarrow f(\alpha x) = 0$

$\Rightarrow \alpha f(x) = 0$ ($f(x) \neq 0$) $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\mathrm{Ker} f \subset E$ et $\langle x \rangle \subset E$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f + \langle x \rangle \subset E$

et $\dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \langle x \rangle - \dim(\mathrm{Ker} f \cap \langle x \rangle)$ ($= 0$)

$\dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \dim \mathrm{Im} f = n - 1$

$\dim \langle x \rangle = 1$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = n - 1 + 1 = n = \dim E$

alors $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle = E$

(car $\dim(\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle) = \dim E$ et $\mathrm{Ker} f + \langle x \rangle \subset E$)

Ex 4 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1) Mq f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On Mq f est une app° linéaire.

$\forall (x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$f((x,y,z) + (a,b,c)) = f(x+a, y+b, z+c)$

$= (x+a+y+b, x+a+y+b, x+a+y+b)$

$= (x+y, x+y, x+y) + (a+b, a+b, a+b)$

$f((x,y,z) + (a,b,c)) = f(x,y,z) + f(a,b,c)$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^3$

$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$= (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda y)$

$= \lambda (x+y, x+y, x+y)$

$= \lambda f(x,y,z)$

donc c'est une app° linéaire

et parceque l'app° est de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

donc c'est un endomorphisme.

2) Donnez une base de $\ker f$

On a

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+y, x+y, x+y) = (0,0,0)$

(donc $x+y=0 \Rightarrow x = -y$)

$= \{ (-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (-y, y, 0) + (0, 0, z) / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1) / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \langle B \rangle$

Rengendre $\ker f$

avec $B = \{(-1,1,0), (0,0,1)\}$

Ex 4 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

1) Mq f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On Mq f est une app° linéaire.

$\forall (x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$f((x,y,z) + (a,b,c)) = f(x+a, y+b, z+c)$

$= (x+a+y+b, x+a+y+b, x+a+y+b)$

$= (x+y, x+y, x+y) + (a+b, a+b, a+b)$

$f((x,y,z) + (a,b,c)) = f(x,y,z) + f(a,b,c)$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^3$

$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$= (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda y)$

$= \lambda (x+y, x+y, x+y)$

$= \lambda f(x,y,z)$

donc c'est une app° linéaire

et parceque l'app° est de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

donc c'est un endomorphisme.

2) Donnez une base de $\ker f$

On a

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+y, x+y, x+y) = (0,0,0)$

(donc $x+y=0 \Rightarrow x = -y$)

$= \{ (-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (-y, y, 0) + (0, 0, z) / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1) / y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \langle B \rangle$

Rengendre $\ker f$

avec $B = \{(-1,1,0), (0,0,1)\}$

Mq B est libre

Soit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$

$\alpha(-1,1,0) + \delta(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (-\alpha, \alpha, \delta) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha = \delta = 0$

alors B est libre

Donc B est une base de Ker f

$\dim(\text{Ker } f) = \text{Card}(\text{Ker } f) = 2$

3) $\text{Im } f = \{ f(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ (x+y)(1,1,1) / x, y \in \mathbb{R} \}$

$\text{Im } f = \langle A = (1,1,1) \rangle$

Donc A engendre Im f

Mq B est libre

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(1,1,1) = (0,0,0)$

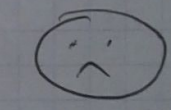
$\Rightarrow (\lambda,\lambda,\lambda) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda = 0$

Donc A est libre

D'où A une base de Im f

C'est une méthode ± fausse



Selon le théorème du rang

$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$

D'où $\dim \text{Im } f = 3 - 2 = 1$

On a $e_1 = (1,0,0) \Rightarrow f(e_1) = (1,1,1)$

$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow f(e_2) = (1,1,1)$

$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow f(e_3) = (0,0,0)$

et parce qu'on a $(1,1,1) \neq (0,0,0)$

$\{(1,1,1)\}$ libre

$\text{Card}\{(1,1,1)\} = \dim \text{Im } f$

$\Rightarrow \{(1,1,1)\}$ est une base de Im f.

Mq B est libre

Soit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$

$\alpha(-1,1,0) + \delta(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (-\alpha, \alpha, \delta) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha = \delta = 0$

alors B est libre

Donc B est une base de Ker f

$\dim(\text{Ker } f) = \text{Card}(\text{Ker } f) = 2$

3) $\text{Im } f = \{ f(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ (x+y)(1,1,1) / x, y \in \mathbb{R} \}$

$\text{Im } f = \langle A = (1,1,1) \rangle$

Donc A engendre Im f

Mq B est libre

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(1,1,1) = (0,0,0)$

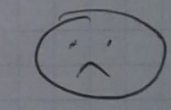
$\Rightarrow (\lambda,\lambda,\lambda) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \lambda = 0$

Donc A est libre

D'où A une base de Im f

C'est une méthode ± fausse



Selon le théorème du rang

$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$

D'où $\dim \text{Im } f = 3 - 2 = 1$

On a $e_1 = (1,0,0) \Rightarrow f(e_1) = (1,1,1)$

$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow f(e_2) = (1,1,1)$

$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow f(e_3) = (0,0,0)$

et parce qu'on a $(1,1,1) \neq (0,0,0)$

$\{(1,1,1)\}$ libre

$\text{Card}\{(1,1,1)\} = \dim \text{Im } f$

$\Rightarrow \{(1,1,1)\}$ est une base de Im f.

4) $\ker f \oplus \text{Im } g = \mathbb{R}^3$

il suffit de Mq que la réunion de la base de Im f et celle de ker f est une base de $\mathbb{R}^3$

$\text{Card}(B_{\text{Im}f} \cup B_{\ker f}) = \dim \mathbb{R}^3 = \text{card}(B_{\mathbb{R}^3})$

il suffit de Mq $\{B_{\text{Im}f}, B_{\ker f}\}$, est une famille libre

soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha) + (-\beta, \beta, 0) + (0,0,\gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc $\{B_{\ker f} \cup B_{\text{Im}f}\}$ est une famille libre

donc $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Ex 1

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x+y-z, x-2y+3z, 2x+3y-4z)$

1) Trouver une base de $\ker(f)$

2) Trouver une base de $\text{Im}(f)$

V) 1) Trouvons une base de $\ker(f)$

$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{matrix} x+y-z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)L_2}{\underset{L_1+L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\ker f \oplus \text{Im } g = \mathbb{R}^3$

il suffit de Mq que la réunion de la base de Im f et celle de ker f est une base de $\mathbb{R}^3$

$\text{Card}(B_{\text{Im}f} \cup B_{\ker f}) = \dim \mathbb{R}^3 = \text{card}(B_{\mathbb{R}^3})$

il suffit de Mq $\{B_{\text{Im}f}, B_{\ker f}\}$, est une famille libre

soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha) + (-\beta, \beta, 0) + (0,0,\gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

donc $\{B_{\ker f} \cup B_{\text{Im}f}\}$ est une famille libre

donc $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Ex 1

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x+y-z, x-2y+3z, 2x+3y-4z)$

1) Trouver une base de $\ker(f)$

2) Trouver une base de $\text{Im}(f)$

V) 1) Trouvons une base de $\ker(f)$

$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{matrix} x+y-z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)L_2}{\underset{L_1+L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=-z \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker f = \{(-z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(\underbrace{-1, 2, 1}_{e_1}) / z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle e_1 \rangle$

$\ker f$ engendré par $\{e_1\}$

Mq $\{e_1\}$ est libre.

soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\alpha . e_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha - \alpha) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\{e_1\}$ est libre. donc une base de $\ker f$.

2) Trouvez une base de $\mathrm{Im} f$.

On sait que $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 2$

Soit $A = \{f(1,0,0), f(0,1,0)\} = \{(1, -1, 2), (1, 2, 3)\}$

Soit $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$,

$\lambda(1, -1, 2) + \alpha(1, -2, 3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \lambda = \alpha = 0$

donc il est libre.

On a $\mathrm{Card}\, A = \dim(\mathrm{Im} f)$

donc A une base de $\mathrm{Im} f$.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=-z \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker f = \{(-z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(\underbrace{-1, 2, 1}_{e_1}) / z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle e_1 \rangle$

$\ker f$ engendré par $\{e_1\}$

Mq $\{e_1\}$ est libre.

soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\alpha . e_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha - \alpha) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\{e_1\}$ est libre. donc une base de $\ker f$.

2) Trouvez une base de $\mathrm{Im} f$.

On sait que $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 2$

Soit $A = \{f(1,0,0), f(0,1,0)\} = \{(1, -1, 2), (1, 2, 3)\}$

Soit $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$,

$\lambda(1, -1, 2) + \alpha(1, -2, 3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \lambda = \alpha = 0$

donc il est libre.

On a $\mathrm{Card}\, A = \dim(\mathrm{Im} f)$

donc A une base de $\mathrm{Im} f$.

Ex : Soit $A = I_3 + B$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculez A^2 et A^3

2) Montrer par récurrence que B^n est multiple de B

3) Déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) On calcule les matrices $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

2) Mq B^n est un multiple de B

pour $n = 1$ $\quad B^1 = 1 \cdot B$

Supp $B^n = \alpha B$ tq $\alpha \in \mathbb{R}$ et on Mq $B^{n+1} = \beta \cdot B$.

On a $B^{n+1} = B^n \cdot B = \alpha B \cdot B = \alpha B^2$

On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$

donc $B^{n-1} = 3\alpha \cdot B$

on montre par récurrence que $B^n = 3^{n-1} B$ pour $n \geq 1$ pour quelque n

donc B^n est un multiple de B

3) $A^n = (I_3 + B)^n$ (on a $I_3 B = B I_3$ donc la formule de Binome est applicable)

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \cdot I^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$ avec $I^{n-k} = I$

$= I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k$

$= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} \right) B$

$= I_3 + \underbrace{\left(\sum C_n^k 3^{k-1} \right)}_{\parallel} \cdot B = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} \cdot B$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot 3^k \cdot 1^{n-k}$

$= \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k \cdot 1^{n-k} - 1 \right]$

$= \frac{4^n - 1}{3}$

Ex : Soit $A = I_3 + B$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculez A^2 et A^3

2) Montrer par récurrence que B^n est multiple de B

3) Déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) On calcule les matrices $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

2) Mq B^n est un multiple de B

pour $n = 1$ $\quad B^1 = 1 \cdot B$

Supp $B^n = \alpha B$ tq $\alpha \in \mathbb{R}$ et on Mq $B^{n+1} = \beta \cdot B$.

On a $B^{n+1} = B^n \cdot B = \alpha B \cdot B = \alpha B^2$

On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$

donc $B^{n-1} = 3\alpha \cdot B$

on montre par récurrence que $B^n = 3^{n-1} B$ pour $n \geq 1$ pour quelque n

donc B^n est un multiple de B

3) $A^n = (I_3 + B)^n$ (on a $I_3 B = B I_3$ donc la formule de Binome est applicable)

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \cdot I^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$ avec $I^{n-k} = I$

$= I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k$

$= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} \right) B$

$= I_3 + \underbrace{\left(\sum C_n^k 3^{k-1} \right)}_{\parallel} \cdot B = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} \cdot B$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot 3^k \cdot 1^{n-k}$

$= \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k \cdot 1^{n-k} - 1 \right]$

$= \frac{4^n - 1}{3}$

Ex 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A.B$ et $B.A$

2) Calculer $(A+B)^2$

✓

1) $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA \iff AB = -BA$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

$= AA + A.B + B.A + B.B$

$(A+B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$

Ex 1

Résoudre les système suivantes:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Ex 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A.B$ et $B.A$

2) Calculer $(A+B)^2$

✓

1) $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB \neq BA \iff AB = -BA$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

$= AA + A.B + B.A + B.B$

$(A+B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$

Ex 1

Résoudre les système suivantes:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Serie de Revision

Ex 1 :

1) La commutativité dans $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x T y \overset{?}{=} y T x$

On a $x T y = xy - 4x - 4y + 20$

(x com dans $\mathbb{R}$) $= yx - 4y - 4x + 20$

$x T y = y T x$

donc T est commutative dans $\mathbb{R}$

L'associativité de T dans $\mathbb{R}$.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x T y) T z \overset{?}{=} x T (y T z)$

On a $(x T y) T z = (xy - 4x - 4y + 20) T z$

$= (xy - 4x - 4y + 20) z - 4 (xy - 4x - 4y + 20) - 4x + 20$

$= xyz - 4xz - 4yz + 20z - 4xy + 16x + 16y - 80 - 4x + 20$

$= xyz - 4xz - 4yz - 4xy + 16z + 16x + 16y - 60$

$x T (y T z) T = \dots$

$= xyz - 4xz - 4yz - 4xy + 16z + 16x + 16y - 60$

On a $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x T (y T z) = (x T y) T z$

donc la loi T est ASSOCIATIVE dans $\mathbb{R}$.

2) On cherche dans le brouillon un e tel y

$\exists e \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad x T e = x$

puis on écrie dans la rédaction seulement la verification

(car l'élément neutre s'il existe il est unique . **e = 5**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x T 5 = 5x - 4x - 20 + 20 = x$

3) Soit $x \in \mathbb{R} \quad \exists ? x' \in \mathbb{R}$ Tq $x T x' = x' T x = e$

On a T est commutative dans $\mathbb{R}$ alors

$\exists ! x' \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}$ Tq $x T x' = e$

$x T x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5$

$\Rightarrow xx' - 4x' - 4x - 15$

$\Rightarrow x'(x-4) = 4x - 15$

1ère cas:

pour $x \neq 4$ on a $x' = \frac{4x-15}{x-4}$

2ème cas:

pour $x = 4$ on a $x'(4-4) = 16 - 15 = 1$

$\rightarrow 0 = 1$ (absurde)

Tout les éléments dans $\mathbb{R}$ différents de 4 sont symétrisables

4) Mq $(\mathbb{R}-\{4\}, T)$ est un groupe com.

Pour cela: Mq

* T est un loi de composition interne dans $\mathbb{R}-\{4\}$
* T est commutative. $\mathbb{R}-\{4\}$
* T est associative dans $\mathbb{R}-\{4\}$
* Elt neutre ...
* Tout élément de $\mathbb{R}-\{4\}$ admet un symétrie

a - Mq T est un L.C.I dans $\mathbb{R}-\{4\}$

On a T une L.C.I dans $\mathbb{R}$

Il reste à Mq $xTy \neq 4 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}-\{4\}$

Par l'absurde

Supp que $xTy = 4$

$xTy = 4 \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 20 = 4$

$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $y = 4$ absurde

car $x \neq 4$ et $y \neq 4$

Donc T est un L.C.I dans $\mathbb{R}-\{4\}$

b - On a T est com dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{4\} \subset \mathbb{R}$

donc T com dans $\mathbb{R}-\{4\}$

c - On a T est associative dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{4\} \subset \mathbb{R}$

Donc T est associative dans $\mathbb{R}-\{4\}$

d- l'élément neutre dans $\mathbb{R}$ est $e=5$ et $5 \in \mathbb{R}-\{4\}$

Donc 5 est aussi l'élément neutre dans $\mathbb{R}-\{4\}$

e- Selon la question précédent, Tout élément de $\mathbb{R}-\{4\}$ admet un symétrie Donc $(\mathbb{R}-\{4\}, T)$ un groupe commutatif.

5) On a $]4,+\infty[\subset \mathbb{R}-\{4\}$

pour montrer que $(]4,+\infty[, T)$ est un groupe com il suffit de montrer que c'est un sous groupe de $(\mathbb{R}-\{4\}, T)$

On a $(]4,+\infty[, T) \neq \phi$

Car $e=5 \in (]4,+\infty[, T)$

Soient $x, y \in (]4,+\infty[, T)$

et z et le symétrique de y

On a : $xTz = xz - 4x - 4z + 20$

or $\begin{cases} 4 \mathcal{C} x \\ 4 \mathcal{C} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o \mathcal{C} x-4 \\ o \mathcal{C} y-4 \end{cases}$

$\Rightarrow xTz = xz - 4x - 4z + 20$

et donc $z = \dfrac{4z-15}{y-4}$

d'où $xTz = x\left(\dfrac{4z-15}{y-4}\right) - 4x - 4\left(\dfrac{4y-15}{y-4}\right) + 20$

$= \dfrac{1}{y-4}\left[4xy - 15x - 4x(y-4) - 4(4y-15) + 20(y-x)\right]$

$= \dfrac{1}{y-4}\left[-15x + 16x - 16y + 60 + 20y - 80\right]$

$= \dfrac{1}{y-4}(x + 4y - 20)$

$xTz > 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y-4}(x+4y-20) > 4$

$\Leftrightarrow x + 4y - 20 > 4(y-4)$

$\Leftrightarrow x + 4y - 20 - 4y + 16 > 0$

$\Leftrightarrow x - 4 > 0$

$\Leftrightarrow x > 4$

Donc $xTz \in (]4,+\infty[, T)$